



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5.03.2016

Clasa a V – a

1 FELADAT. Radunak és Alexandrának együtt 11 leje van. Elhatározzák, hogy közösen egy könyvet vásárolnak, egyforma pénzüsszeggel járulva hozzá. Radu kölcsön kell kérjen Alexandrától 1 lejt, és a könyv megvétele után Alexandrának 5 leje maradt.

- a) Határozzátok meg a könyv árát;
- b) Hány leje volt Alexandrának eredetileg?

2. FELADAT. Mutassátok ki, hogy a 3 bármely 5 hatványa közül létezik legalább kettő, melyek különbsége osztható 5-tel.

3. FELADAT. Az A természetes számokat tartalmazó halmaznak a következő tulajdonságai vannak:

- (i) $2 \in A$;
- (ii) ha $x \in A$, akkor $4x \in A$;
- (iii) ha $9x + 11 \in A$, akkor $x \in A$.

Igazoljátok, hogy $13 \in A$.

4. FELADAT. Egy táblára 20 fehér kör, 21 piros kör és 22 zöld kör van felrajzolva. Letörlünk két különböző színű kört és helyettük egy harmadik színű kört rajzolunk. Ezt a műveletet addig ismétljük, ameddig a táblán csak egy kör marad. Határozd meg a táblán maradt kör színét. Válaszod indokold.

¹Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5.03.2016

Clasa a VI – a

1. FELADAT. Az ABC háromszögben legyenek az M, N és P pontok az $[AB]$, $[BC]$, illetve $[AC]$ oldalak felezőpontjai. Legyen az $E \in (NP)$ pont úgy, hogy $[NP] \equiv [PE]$ és a $D \in (CM)$ pont úgy, hogy $[CM] \equiv [MD]$. Mutassátok ki, hogy:

- a) $AE = NC$;
- b) $AD = 2 \cdot AE$.

2. FELADAT. Adott az $A = \{n \mid n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c, \text{ ahol } a, b, c \in \mathbb{N}\}$ halmaz.

- a) Igazoljátok, hogy $81 \in A$;
- b) Határozzátok meg az A halmaz azon elemeit amelyeknek pontosan 6 osztója van.

3. FELADAT. Legyen \widehat{XOY} egy hegyes szög. Az OX által meghatározott félsíkban és amelyekben nincs az $[OY]$ félegyenes, az $[OA]$ és $[OB]$, merőlegeseket emeljük $[OX]$ -re illetve $[OY]$ -ra. Jelöljük $[OC]$ -vel a \widehat{BOX} szög szögfelezőjét.

- a) Tudva, hogy az \widehat{AOC} szög mértéke 16° -kal nagyobb mint az \widehat{XOY} szög mértéke, határozzátok meg $m(\widehat{XOY})$;
- b) Mutassátok ki, hogy ha $[OB]$ az \widehat{AOC} szög szögfelezője, akkor $[OX]$ a \widehat{COY} szög szögfelezője.

4. FELADAT. Azt mondjuk, hogy egy $\overline{0,abcde}$ alakú szám (P) tulajdonságú, ha az a, b, c, d, e számjegyek a $\{4, 6\}$ halmaz elemei.

- a) Igazoljátok, hogy az $x + 0,46646 = 1,1111$ egyenlet megoldása (P) tulajdonságú;
- b) Határozzátok meg, hány különböző $\overline{0,abcde}$ alakú szám (P) tulajdonságú;
- c) Mutassátok ki, hogy bármely 17 különböző, $\overline{0,abcde}$ alakú, (P) tulajdonságú szám közül ki lehet választani kettőt úgy, hogy összegük $1,1111$ legyen.

¹Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5.03.2016

Clasa a VII – a

1. FELADAT. Legyenek az a_1, a_2, \dots, a_n különböző racionális számok úgy, hogy bármely négyet véve közülük létezik kettő úgy, hogy szorzatuk -1 .

- a) Addjatok egy példát 6 ilyen számra;
- b) Határozzátok meg n maximális értékét.

2. FELADAT. Igazoljátok, hogy ha az $a, b, c \in \mathbb{Q}$ szigorúan pozitív számok kielégítik az $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$ összefüggést, akkor:

- a) $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c} + \frac{b+c}{b+2c+3a} + \frac{c+a}{c+2a+3b}} \in \mathbb{Q}$;
- b) $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)} + \frac{bc}{a(2b-c)} + \frac{ca}{b(2c-a)}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3. FELADAT. Az ABC háromszögben legyen M a $[BC]$ oldal felezőpontja. Ha N az $[AM]$ szakasz felezőpontja és $BN \cap AC = \{P\}$, akkor határozzátok meg az $MCPN$ négyszög és az ABC háromszög területeinek arányát.

4. FELADAT. Az ABC háromszögben, legyen M a $[BC]$ felezőpontja és P egy pont a BC -n, $P \neq M$. A P ponton keresztül, az AC -hez húzott párhuzamos az AM egyenest E -ben metszi, valamint a P ponton keresztül az AB -hez húzott párhuzamos az AM egyenest F -ben metszi. Igazoljátok, hogy az E és F pontok szimmetrikusak M -re nézve.

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5.03.2016

Clasa a VIII – a

1. FELADAT Mutassátok ki, hogy ha három nullától különböző valós szám összegének inverze egyenlő az inverzek összegével, akkor ezek közül legalább kettőnek egyforma a modulusza (feltételezzük, hogy a három szám összege nem nulla).

2. FELADAT Ha $x, y > 0$ két valós szám, amelyre teljesül, hogy :

$$2\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{(x+1)(y+4)},$$

akkor számítsátok ki az x és y számok mértani középátlóját.

3. FELADAT Adott a $VABCD$ szabályos négyoldalú gúla, amelyben $AB = 12$. Legyen $AC \cap BD = \{O\}$, M a $[BC]$ szakasz felezőpontja és P az $[AB]$ szakasz felezőpontja. Ha a (VBC) és (ABC) síkok szögének koszinusza $\frac{3}{4}$, határozzátok meg:

- a P pontnak a (VBC) síktól vett távolságát;
- az O pontnak a (VPM) síktól vett távolságát;
- a (VAC) és (VBC) síkok szögének tangensét.

4. FELADAT Az (OA) , (OB) és (OC) , páronként merőleges félegyeneseken felvesszük az A' , B' és C' pontokat úgy, hogy $A' \in (OA)$, $B' \in (OB)$ és $C' \in (OC)$. Tudva, hogy az $A'B'BA$ és $B'C'CB$ négyszögek körbeírhatóak, mutassátok ki, hogy:

- az $A'C'CA$ négyszög körbeírható;
- Ha $OH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$, akkor H az ABC háromszög ortocentruma;
- Ha G az $A'B'C'$ háromszög súlypontja, akkor $OG \perp (ABC)$.

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.